I have computed this Table so far, that the Reader may see in what manner this Method Approximates; this whole Work, as it appears, costing a little more than three Hours time.

V. *Proprietates quædam simplices* Sectionum Conicarum *ex natura* Focorum *deductæ; cum Theoremate generali de Viribus Centripetis; quorum ope Lex Virium Centripetarum ad Focos Sectionum tendentium, Velocitates Corporum in illis revolventium, & Descriptio Orbium facillime determinantur. Per* Abr. *de* Moivre. R. S. Soc.

SIt DE Axis Transversus Ellipseos, AO Axis alter, & C centrum Sectionis. Sit P punctum quodvis in circumferentia ejus; PQ Tangens curvæ ad P, occurrens Axi Transverso ad Q; puncta S, F Foci; CP, CK semidiametri Conjugatæ; PH Semilatus rectum ad diametrum PC; PG normalis ad Tangentem, cui occurrat HG, perpendicularis ipsi PCH, in puncto G, ut fiat PG radius Curvaturæ Ellipseos in puncto P: sint etiam ST, CR, FV perpendiculares in Tangentem PQ demissæ: Jungatur SO, & demittatur in Axem normalis PL. His positis, Dico quod,

I. *Rectangulum sub distantiis ab utroque Ellipseos Foco, sive* $SP \times PF$ *æquale est quadrato Semidiametri* CK.

Demonstratio.

$PSq = PCq + CSq - 2CS \times CL$ per 13. II. Elem.
$PFq = PCq + CSq + 2CS \times CL$ per 12. II. Elem.
Unde $PSq + PFq = 2PCq + 2CSq$.
Jam $PS + PF = DE = 2CD$; ac propterea
$PSq + PFq + 2PS \times PF = 4CDq$. Quare

Quare transponendo, $2 PS \times PF = 4 CDq - 2 PCq - 2 CSq$.

Ac Dimidiando $PS \times PF = 2 CDq - PCq - CSq$.

Est autem CS *quad.* $= CD$ *quad.* $- CO$ *quad*, atque adeo $PS \times PF = CDq + COq - PCq$.

Sed $CDq + COq = PCq + CKq$. *per* 12. VII. *Conic. Apollonii.*

Quare $PS \times PF = CKq$. *Q. E. D.*

II. *Distantia à Foco SP est ad perpendicularem in Tangentem demissam, ut Semidiameter Conjugata CK ad Semiaxem minorem CO.*

Demonstratio.

Ob similia Triangula SPT, FPV, erit $PS : PF :: ST : FV$; ac componendo $PS + PF$ erit ad $ST + FV$, & earundem dimidia CD ad CR, ut PS ad ST. Unde $CD \times CK$ erit ad $CR \times CK$ ut PS ad ST. Sed $CR \times CK$ æquale est rectangulo sub Semiaxibus CD in CO, per 31. VII. *Conic.* Proinde PS est ad ST ut CD in CK ad $CD \times CO$, sive ut CK ad CO. Ac pari argumento demonstrabitur PF esse ad FV in eadem ratione. *Q. E. D.*

III. *In eadem etiam est ratione Semiaxis Transversus CD ad normalem è centro C ad Tangentem demissam, sive ad CR.*

Etenim cum rectangulum $CR \times CK$ æquale sit rectangulo $CD \times CO$, uti jam dictum est, erit ἀνάλογον CD ad CR ut CK ad CO. *Q. E. D.*

IV. *Semidiameter quævis PC est ad distantiam puncti P à foco S, sive ad SP, ut distantia ab altero Foco FP ad dimidium lateris recti ad Verticem P pertinentis, sive ad PH.*

Hoc autem manifestum est ob *Propr.* I. cum nempe quadratum ex CK æquale sit rectangulo sub $SP \times PF$.

V. *Rectangulum Semiaxium $CD \times CO$ est ad quadratum semidiametri conjugatæ CK, ut CK ad Radium Curvaturæ in puncto P, sive ad PG.*

Sunt

Sunt enim Triangula PCR, PGH inter se similia, unde CR est ad PC, ut semilatus rectum PH ad PG: hoc est, per præmissam Proprietatem III, $\frac{CD \times CO}{CK} =$ CR est ad PC ut $\frac{CK^2}{PC} = PH$ ad $\frac{CK^3}{CD \times CO} = PG$. proinde ἀνάλογον $CD \times CO : CK^2 :: CK : PG$. *Q.E.D.*

THEOREMA GENERALE I.

Vis centripeta ad idem punctum S tendens, in Curvis omnibus, est semper proportionalis Quantitati $\frac{SP}{PG \times ST^3}$

Hoc Theorema ante plures annos à me investigatum & cum amicis communicatum, propriis demonstrationibus firmavere Geometræ Clarissimi D. *J. Bernoullius* in *Act. Lipsiæ*; D. *J. Keillius* in harum *Transact.* N. 317. & D. *Jac. Hermannus* in *Phoronomiâ* suâ pag. 70. quos vide.

Scribendo autem CK^3 pro PG, per *Propr.* V; & $\frac{SP}{CK}$ juxta *Propr.* II, pro ST; (ob datas scilicet CD, CO) erit Vis centripeta tendens ad focum Ellipseos S, semper ut $\frac{SP \times CK^3}{CK^3 \times SP^3}$, hoc est ut $\frac{SP}{SP^3}$ vel $\frac{1}{SP^2}$, nempe reciprocè ut quadratum ex SP. Unde patet quod si Sectio fuerit Ellipsis motu corporis descripta, erit Vis Centripeta ut quadratum distantiæ à centro Virium reciprocè. Ex his Proprietatibus consequuntur Corollaria nonnulla notatu non indigna.

Coroll 1. *Velocitas Corporis in Ellipsi revolventis, ad punctum quodlibet P, est ad Velocitatem revolventis in circulo ad eandem distantiam SP à centro Virium, in subdupla ratione distantiæ ab altero foco PF, ad Semiaxem transversum Sectionis, sive ut media proportionalis inter PF & CD ad CD.*

Est enim velocitas revolventis in Ellipsi ad distantiam SP, ad Velocitatem revolventis in Circulo vel Ellipsi ad dist-

diſtantiam Semiaxis $C\,D$ vel $S\,O$, ut $C\,O$ ad $S\,T$; hoc eſt per *Propr.* II. ut $\surd\,P\,F$ ad $\surd\,S\,P$. Velocitas autem revolventis in Circulo ad diſtantiam $C\,D$ eſt ad velocitatem revolventis in Circulo ad diſtantiam $S\,P$, ut $\surd\,S\,P$ ad $\surd\,C\,D$. Ex æquo igitur, Velocitas revolventis in Ellipſi ad diſtantiam $S\,P$, eſt ad Velocitatem revolventis in Circulo ad eandem diſtantiam ut $\surd\,P\,F$ ad $\surd\,C\,D$.

Coroll. 2. *Ex datis Velocitate in Ellipſi, poſitione Tangentis, & centro Virium ſeu Foco, facile eſt determinare Focum alterum.*

Sit enim Velocitas Data R; ea autem Velocitas quâ deſcriberetur Circulus ad datam à centro diſtantiam $S\,P$ ſit Q; ac per *Coroll.* præcedens, R eſt ad Q ut $\surd\,P\,F$ ad $\surd\,C\,D$, adeoque $Q\,Q$ eſt ad $R\,R$ ut $C\,D$ ad $P\,F$, & $2\,Q\,Q - R\,R$ erit ad $R\,R$ ut $S\,P$ ad $P\,F$: Datur autem $S\,P$; data eſt igitur $P\,F$ magnitudine. Datur etiam poſitione, ob angulum $V\,P\,F$ angulo $S\,P\,T$ æqualem. Datur igitur punctum F alter Focorum: Quo invento pronum eſt Sectionem deſcribere.

Si vero $\frac{1}{2}\,R\,R$ majus fuerit quadrato ex Q, $2\,Q\,Q - R\,R$ fit quantitas Negativa, & loco Ellipſeos Trajectoria deſcribenda in Hyperbolam tranſit. Eritque $R\,R - 2\,Q\,Q$ ad $R\,R$ ut $S\,P$ ad $P\,F$ diſtantiam alterius Foci, ad alterum Tangentis latus ponendam, ut habeatur Focus F. Proprietates autem omnes quas in Ellipſi demonſtravimus; mutatis mutandis etiam Hyperbolæ competunt. *Fig.* II.

Quod ſi acciderit $Q\,Q$ æquale eſſe dimidio quadrati ex R; evaneſcente quantitate $2\,Q\,Q - R\,R = 0$, quarta proportionalis $P\,F$ fit infinita: proinde Trajectoria decribenda Parabolica eſt, Foco ſcilicet altero in infinitum abeunte. Axis autem Trajectoriæ poſitione datur; eſt enim ipſi $P\,F$ parallelus, exiſtente ſcilicet angulo $F\,P\,V$ angulo dato $S\,P\,T$ æquali.

Coroll. 3. *Velocitas revolventis in data Sectione Conica ad diſtantiam* $S\,P$ *eſt ad Velocitatem ejuſdem ad diſtantiam aliam* $S\,X$, *ut media proportionalis inter* $F\,P$ *&* $S\,X$ *ad mediam proportionalem inter* $S\,P$ *&* $F\,X$.

Velo-

Velocitas enim in P eſt ut $\sqrt{\frac{FP}{SP}}$ (per *propr.* II.) & per eandem, Velocitas in X eſt ut $\sqrt{\frac{FX}{SX}}$. Unde manifeſta eſt propoſitio.

Coroll. 4. *Ratio etiam Velocitatum duorum Corporum in eodem Syſtemate, ſed in datis Coniſectionibus diverſis, revolventium, datis utriuſque à communi Orbium Foco diſtantiis, ope Corollarii* 1^mi^. *ſtatim obtinebitur.*

Cum enim Velocitas corporis in P ſit ad Velocitatem in Circulo ad eandem diſtantiam SP, ut $\sqrt{PF}$ ad $\sqrt{CD}$; & in alia ſuppoſita Coniſectione, cujus Semiaxis cd & Foci S, f, ad diſtantiam Sp Velocitates illæ ſint ut $\sqrt{pf}$ ad $\sqrt{cd}$: Velocitas autem revolventis in circulo ad diſtantiam SP ſit ad Velocitatem in Circulo ad diſtantiam Sp ut $\sqrt{Sp}$ ad $\sqrt{SP}$; Compoſitis rationibus, erit Velocitas in P ad Velocitatem in p, ut $\sqrt{PF \times cd \times Sp}$ ad $\sqrt{pf \times CD \times SP}$. Quod ſi Sectio illa altera fuerit Parabola, erunt cd, pf infinitæ, ſed in ratione 1 ad 2; proinde ratio Velocitatum erit ut $\sqrt{PF \times Sp}$ ad $\sqrt{2CD \times SP}$.

Coroll. 5. *Quod ſi in Hyperbola punctum P abeat in infinitum, ex præcedentibus manifeſtum eſt, Velocitatem ultimam ac minimam, qua cum corpus in æternum aſcenderet, æqualem eſſe ei qua, ad diſtantiam C D Semiaxi tranſverſo æqualem, Circulum deſcriberet.*

Coroll. 6. *Ex data diſtantia à Foco, datur quoque Poſitio Tangentis, ſive angulus S P T, ſub diſtantia S P & Tangente P T contentus.*

Eſt enim (per *propr.* II.) PS ad ST ut CK ad CO ſive ut $\sqrt{SP \times PF}$ ad CO, atque ita Radius ad Sinum anguli SPT. At in Ellipſibus Circulis affinibus præſtaret angulum PST, ejuſdem complementum ad quadrantem, inquirere: Hujus autem Sinus eſt ad Radium ut $\sqrt{SP \times PF - COq}$ ad $\sqrt{SP \times PF}$.

Coroll.

Coroll. 7. *Atque hinc consequuntur Velocitates quibuscum distantiæ SP crescunt vel decrescunt.*

Nam cum, ex Corollario præcedente, $\surd\overline{SP \times PF}$ sit ad $\surd\overline{SP \times PF - COq}$ ut Radius ad sinum anguli PST, ac in eadem sit ratione Velocitas Corporis in P ad Velocitatem momenti ipsius SP; Velocitas autem illa in P sit (per *propr.* II.) ut $\surd\frac{PF}{SP}$; elisis superfluis, erit $\surd\frac{\overline{SP \times PF - COq}}{SP}$ Velocitati, qua crescit vel decrescit distantia SP, semper proportionalis.

THEOREMA GENERALE II.

In omni Trajectoria Curvilinea Velocitates angulares circa centrum Virium sunt reciprocè proportionales quadratis distantiarum à centro.

Nam ob Sectorum minimorum Areas æquales, arcus angulis minimis subtensi sive Bases, sunt reciprocè ut Radii: Anguli autem minimi quibus Bases æquales subtenduntur sunt etiam reciproce ut Radii. Proinde anguli Sectorum minimorum Areâ æqualium, sunt inter se reciprocè in dupla ratione Radiorum, sive ut quadrata distantiarum.

Coroll. 8. *Hinc Velocitates angulares revolventium in diversis Ellipsibus datis comparantur inter se.*

Velocitates enim angulares quibuscum ad distantias Semiaxibus Transversis æquales circuli describerentur, sunt reciproce in ratione sesquialtera Axium, sive ut $\frac{1}{CD\surd CD}$. Velocitates autem angulares has medias habent Corpora revolventia, cum quadrata distantiarum æquantur rectangulis sub semiaxibus Ellipseôn. Ideo (per *Theor.* II.) erit SPq ad $CD \times CO$ ut $\frac{1}{CD\surd CD}$ ad $\frac{CO}{SPq \times \surd CD}$: quæ quidem Quantitas est ut Velocitas anguli ad centrum S, motu rectæ SP, tempore quam minimo dato, descripti.

Coroll. 9. *Velocitas angularis qua circumgyratur Tangens PT, sive recta in Tangentem perpendicularis ST, est ad Ve-*

locitatem

locitatem angularem rectæ SP, *ut Semiaxis tranſverſus* CD *ad diſtantiam ab altero Foco* PF.

Demonſtratio.

In *Fig.* III. Sint puncta P, p, quamproxima inter ſe; ductiſque $SP . Sp$, ſint PT, pt duæ Tangentes, ad quas demittantur normales ST, St; iiſque parallelæ ducantur radii Curvaturæ PG, pG coeuntes in G: ac deſcribatur, centro S & radio SP, arcus minimus PE occurrens ipſi Sp in E. Manifeſtum eſt angulum PGp æqualem eſſe angulo TSt, ſive angulari Velocitati normalis ST. Eſt autem angulus PSp angularis velocitas rectæ SP; quare angulus PGp eſt ad angulum PSp ut angularis Velocitas ipſius ST ad angularem velocitatem rectæ SP; hoc eſt, ut $\frac{Pp}{PG}$ ad $\frac{PE}{PS}$. Sed $Pp . PE :: SP . ST :: CK : CO$ (per *propr.* II). Hæ igitur Velocitates ſunt ut $\frac{CK}{PG}$ ad $\frac{CO}{PS}$. Pro PG ſcribe $\frac{CK^3}{CD \times CO}$ (per *propr.* V.) ac $\frac{CK}{PG}$ fiet $\frac{CD \times CO}{CKq} = \frac{CD \times CO}{PS \times PF}$. Hinc $\frac{CD \times CO}{PS \times PF}$ erit ad $\frac{CO}{PS}$, ſive, deletis ſuperfluis, CD ad PF, ut angulus TSt ad angulum PSp, ſive Velocitas angularis Tangentis ad angularem Velocitatem diſtantiæ SP: proinde Velocitas qua circumgyratur Tangens, ſemper proportionalis eſt quantitati $\frac{CO \times \sqrt{CD}}{PF \times SPq}$.

Pleraque horum Corollariorum ex aliis Conicarum Sectionum Proprietatibus deducta, vel facile deducenda, inveniet Lector in Sect. III. Lib. I. Princip. Nat. Philoſophiæ.

F I N I S.

LONDON, Printed for *W. Innys*, at the *Princes Arms* in St. *Paul's-Church-Yard*, 1717.

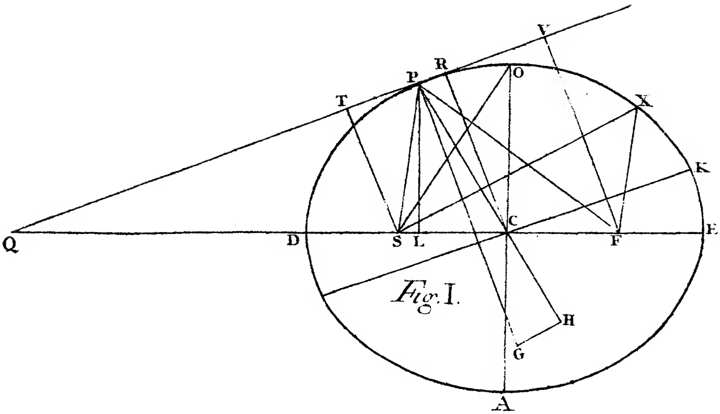

Fig. I.

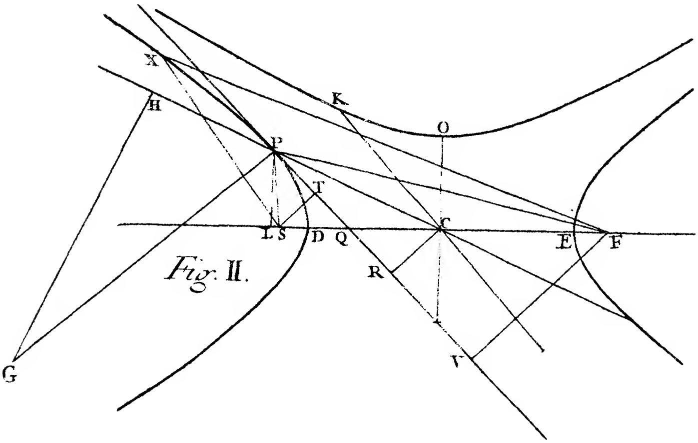

Fig. II.

Fig. III